LE CALCUL MENTAL AUX CYCLES 2 ET 3
Animation pédagogique
9 novembre 2011
St Chély d'Apcher

1. Calcul mental, calcul automatisé, calcul réfléchi – Oral ou écrit ?

Dans le domaine du calcul **mental**, il convient de distinguer ce qu'il faut **mémoriser** ou **automatiser** (les tables, quelques doubles et moitiés, le calcul sur les dizaines et les centaines entières, les compléments à la dizaine supérieure…) et ce qu'il faut être capable de **reconstruire** (et qui relève du calcul **réfléchi** : idée de rendre plus simple un calcul, souvent en procédant par étapes plus nombreuses, mais en s'appuyant sur ce qui est connu).

On peut être tenté d'opposer le calcul mental au calcul écrit ou instrumenté. **Mais parler de calcul mental ne signifie pas que tout se passe sans écrire.**
Ce qu'on désigne sous le terme de **calcul écrit** ("l'opération posée") **requiert la connaissance des tables et la gestion des retenues,** donc du calcul mental. Il ne dispense donc pas de calculer mentalement, bien au contraire ; la technique écrite française traditionnelle de la **division**, avec ou sans les soustractions intermédiaires requiert de nombreux **traitements mentaux**. Le **déficit de maîtrise** du calcul mental fragilise gravement l'apprentissage des techniques écrites.
L'expérience atteste, depuis des dizaines d'années, que les enfants ont souvent tendance à ***calculer mentalement en appliquant les algorithmes écrits****.* ***Ceci est dû très probablement à un établissement insuffisant du calcul mental préalablement à l'apprentissage des techniques écrites qui sont souvent abordées trop tôt et, par la suite, à une prise de conscience insuffisante des différences de traitement entre calcul écrit et calcul mental.*** *Calculer mentalement 127 + 16 en référence à la technique écrite est plus coûteux en terme de charge mentale de travail que d'ajouter successivement 10 et 6. Il importe clairement que les techniques écrites s'appuient sur une pratique du calcul mental déjà bien installée.*

Le calcul mental s'oppose au calcul posé, mais pas au recours à l'écriture

L'expression de "calcul mental", signifie qu'entre l'énoncé du problème et l'énoncé du résultat, on **renonce à utiliser toute opération posée** (technique opératoire usuelle). Cela n'implique pas qu'aucun support écrit ne puisse intervenir dans la consigne, dans la formulation du résultat voire même dans le cours du calcul.
Le calcul réfléchi (nécessitant l'élaboration et l'utilisation de procédures intermédiaires pour obtenir le résultat) **peut faire intervenir l'écrit** car les élèves peuvent avoir besoin de **garder une trace écrite des étapes du calcul.** Celle-ci constitue d'une certaine manière un " brouillon " et n'a pas forcément à respecter les règles formelles d'écriture (même si l'enseignant peut ensuite les utiliser pour travailler l'écriture des calculs en ligne par exemple).

2. Stratégies et paradoxe de l'automatisme

L'enseignement du calcul mental est paradoxal : **trop peu d'automatismes** (au sens de trop peu de procédures automatisées installées en mémoire et ayant fait l'objet d'un enseignement préalable) **peuvent renforcer l'automatisme** (au sens du comportement automatisé se caractérisant par une mobilisation quasi systématique de l'élève d'un seul type de procédure quelles que soient les données numériques du calcul à effectuer : sens de « automate »). Davantage d'automatismes peuvent permettre d'échapper à l'automatisme.

Par exemple pour effectuer le calcul de **45 + 17**, les procédures possibles sont les suivantes :
– simulation mentale de **l'algorithme écrit**, l'élève « pose dans sa tête » l'opération en colonnes :
– utilisation de la **décomposition additive** canonique de l'un ou des deux termes :

$$45 + 17 = 45 + 10 +7 = 55 + 7 = 62$$

Ou :

$$45 + 17 = 40 + 5 + 10 + 7 = 50 + 12 = 62 ;$$

– utilisation d'une **décomposition additive** de l'un des termes **s'appuyant sur un passage à une dizaine supérieure** :

$$45 + 17 = 45 + 5 + 12 = 50 + 12 = 62$$

Ou :

$$45 + 15 + 2 = 60 + 2 = 62$$

Ou :

$$2 + 43 + 17= 2 + 60 = 62 ;$$

– utilisation d'une **décomposition soustractive** de l'un des termes :

$$45 + 20 – 3 = 65 – 3 = 62 ;$$

– etc.

Ces procédures se différencient par les connaissances mobilisées, le coût en mémoire et en calcul. L'algorithme écrit simulé mentalement mobilise peu de connaissances sur les propriétés des nombres en jeu mais en revanche, il est très coûteux car il nécessite de mémoriser beaucoup de données. Les procédures basées sur des décompositions canoniques (nombres de dizaines et d'unités) nécessitent de connaître des décompositions souvent fréquentées. Plus économiques que la précédente, elles restent coûteuses. Les deux derniers types de procédures réduisent le coût en mémoire et en calculs intermédiaires mais nécessitent la disponibilité de décompositions moins souvent fréquentées. De plus, très liées aux nombres en jeu, elles ne peuvent être mobilisées dans tous les calculs.

L'élève ne pourra mobiliser rapidement la décomposition 17 = 20 – 3 (ou 17 = 5 + 12) dans le calcul 45 + 17 que si celles–ci sont disponibles. Ce qui nécessite un **entraînement spécifique**.
L'élève doit non seulement avoir appris à décomposer ces nombres mais ces **décompositions** doivent avoir été **automatisées**.
La connaissance et la maîtrise d'un nombre insuffisant de procédures automatisées peuvent donc conduire l'élève à adopter, en calcul, un comportement automatisé.
Pour dépasser ce comportement, il est nécessaire d'enrichir le panel des procédures automatisées.

3. Les différentes fonctions du calcul mental

Au-delà de vertus traditionnellement évoquées ("gymnastique intellectuelle", "adresse de l'esprit" et même "formation du caractère", ou plus précisément "développement de l'attention et de la mémoire"), la pratique du calcul mental a une double fonction, sociale et pédagogique.

Fonction sociale

Il est d'abord un calcul d'usage. Il s'agit de mettre en place des moyens efficaces de calculer, utiles **dans la vie courante**, en l'absence de supports ou d'instruments. Même si l'usage de la calculette est de plus en plus répandu, il demeure nécessaire de savoir calculer sans elle, ou, à tout le moins, de pouvoir effectuer un calcul approché. C'est là d'ailleurs un moyen efficace de contrôle, une erreur de manipulation étant toujours possible. Enfin, comme cela a déjà été souligné, sans

disponibilité rapide des résultats des tables, il n'y a pas d'accès possible aux techniques opératoires : n'oublions pas que, dans le cas de la multiplication, à l'entrée en sixième les erreurs de table sont plus fréquentes que celles qui sont dues à une mauvaise maîtrise de l'algorithme de calcul. Dans cette perspective, **trois types d'objectifs** peuvent être distingués :
- **l'automatisation des calculs simples**, orientée vers la production de résultats immédiatement disponibles : récupération en mémoire ou reconstruction instantanée, procédures automatisées ;
- **la diversification des stratégies de calcul complexe** : calcul réfléchi ou raisonné ;
- **une première maîtrise du calcul approché**, souvent utilisé dans la vie courante et dont l'apprentissage doit se poursuivre au collège.

Fonction pédagogique

Dans les apprentissages mathématiques, il joue un rôle important pour la compréhension et la maîtrise des notions enseignées. **Cinq pistes** peuvent être distinguées :

- Le calcul mental permet aux élèves de **construire et de renforcer leurs premières connaissances relatives à la structuration arithmétique des nombres** entiers naturels (relations additives ou multiplicatives entre les nombres : double, moitié, tiers, quart, décompositions additives et multiplicatives ; numération décimale : 97 + 10…) ;

- La pratique du calcul réfléchi s'appuie, le plus souvent implicitement, sur les **propriétés des opérations** [**commutativité** : 9x3 = 3x9, **associativité** : 3x4 = 3x(2x2) = (3x2)x2 = 6x2, **distributivité** de la multiplication sur l'addition : 8x7 = 8x (5+2) = 8x5 + 8x2] et, en retour, en assure une première compréhension ;

- Le calcul mental permet d'enraciner le **sens des opérations** et de développer la compréhension des **liens entre elles** : savoir que 6+4 = 10 permet de connaître le résultat de 10-4 et de 10-6, de dire l'écart entre 4 et 10, entre 6 et 10, de répondre à « combien faut-il pour aller de 4 à 10 ou de 6 à 10.

- Les premiers maniements des notions mathématiques (ceux qui en permettent la compréhension initiale) sont le plus souvent fondés sur le recours au calcul mental ; que l'on pense aux **situations de proportionnalité** ou aux **travaux sur les fractions** à l'école primaire ou, plus tard, aux calculs sur les nombres relatifs ou au calcul algébrique : pour l'essentiel, les compétences des élèves se construisent dans un domaine numérique où domine le calcul mental ;

- Le calcul réfléchi nécessite l'élaboration de procédures originales et, par là, contribue au développement des **capacités de raisonnement** des élèves (d'où l'expression de « calcul raisonné ») ;

- Le calcul mental apporte souvent une **aide à la résolution de problèmes**, en permettant de ramener un problème à un champ numérique dans lequel les opérations deviennent plus familières : essayer avec des nombres plus petits permet, par exemple, d'avoir une intuition d'un mode de traitement possible.

Les automatismes de calcul installés au cours d'une pratique régulière de calcul mental permettent aux élèves de construire des schémas de problèmes (Julo, 1995). Tout se passe comme si l'élève avait construit une **mémoire des problèmes déjà rencontrés** ainsi que **des**

procédures de résolution associées. Cette mémoire s'organise grâce à une certaine **catégorisation** et à un **recours à des problèmes prototypiques** représentatifs de chaque catégorie. L'élève s'avère alors capable de **mobiliser à bon escient le modèle le plus adapté pour résoudre le problème**.

La **technique** n'est pas première par rapport au **sens** et inversement le **sens** ne peut pas se construire sans **technique**. Technique et sens se construisent dialectiquement.

4. Les conditions de la mémorisation

Certains élèves mémorisent facilement les tables d'addition ou de multiplication, d'autres ne parviennent pas à une mémorisation satisfaisante, malgré un entraînement répété. En effet, même s'il est indispensable, l'entraînement n'est pas le seul ressort de la mémorisation. Plusieurs conditions se révèlent tout aussi importantes :

- **Une bonne représentation des nombres** aussi bien **imagée** (constellations, collections de doigts, etc.) que **symbolique** (chiffrée ou verbale). Il est donc important, dans les premiers apprentissages des nombres, à l'école maternelle (voir ci-dessous), de **consolider les images mentales des « petits nombres »**, à partir de leurs représentations sous forme de **constellations**. Les nombres doivent être mis en **relation** les uns avec les autres, en particulier le fait de dire le nombre suivant c'est ajouter 1, ou dire le précédent c'est soustraire 1.

- **La compréhension des opérations en jeu**. L'élève est d'abord capable de calculer **« quatre plus trois »** parce qu'il est capable d'évoquer **« quatre objets réunis avec trois objets »** ou parce qu'il sait que le résultat est le nombre qui est situé **« trois après quatre » sur la bande numérique**, donc parce l'addition **a du sens** pour lui. Il n'y a pas encore mémorisation et, pourtant, c'est la première étape de la mémorisation.

- La prise de conscience de l'intérêt qu'il peut y avoir à disposer d'un **répertoire de résultats progressivement organisé, complété et structuré en tables.** Celui-ci permettra aux élèves de prendre conscience de ce qu'ils savent et de ce qu'il leur reste à apprendre, de constater qu'ils progressent.

- La prise de conscience que certains résultats sont mémorisés et qu'**un répertoire mental est en train de se constituer**. L'élève prend alors conscience de l'intérêt de cette mémorisation car elle va être mobilisée pour résoudre d'autres calculs, des problèmes… On retient mieux ce que l'on sait devoir resservir.

- La capacité à **utiliser ce qu'on sait pour obtenir d'autres résultats** : « quatre plus trois, c'est **un de plus** que trois plus trois », « six fois huit, c'est **huit de plus** que cinq fois huit », « quatre fois sept, c'est **le double** de deux fois sept ». La mise en place de points d'appui est donc une étape décisive de la mémorisation (voir ci-dessous).

- **L'entraînement** des résultats mémorisés. La mémorisation est favorisée par **l'entraînement** et, probablement, par **la diversité** des représentations mises en jeu. Exemple : la répétition verbale rituelle des "tables", dans l'ordre croissant, engendre des risques, en particulier celui de ne pas pouvoir fournir un résultat sans réciter toute la table ou encore celui d'une confusion entre résultats voisins. Mieux vaut donc, s'agissant d'entraînement et de construction des "tables", **ne pas procéder toujours par ordre croissant**.

5. Points d'appui pour la mémorisation

Les délais de réponses enregistrés auprès d'élèves en phase d'apprentissage montrent que les **résultats additifs simples sont d'abord reconstruits** (avant d'être produits instantanément), en utilisant progressivement différents points d'appui que l'enseignant doit aider à mettre en place :

- utilisation de la suite numérique, par **surcomptage** ;
- appui sur **les doubles connus** : 5 + 4, c'est 1 de plus que 4 + 4 ;
- utilisation de la **commutativité** de l'addition : 2 + 9 c'est comme 9 + 2 ;
- utilisation du **passage par la dizaine** : pour calculer 8 + 5, on « complète à dix » on ajoute d'abord 2 à 8 puis 3 à 10 (ce qui suppose de connaître les compléments à 10 et les décompositions additives des nombres inférieurs à 10).

Pour les **résultats multiplicatifs**, la reconstruction est plus difficile et il faut viser, avant la fin du cycle 3, une mémorisation totale des produits des tables et leur utilisation pour répondre à des questions du type « combien de fois 7 dans 56 ? », « 56 divisé par 7 ? » ou « décomposer 56 sous forme de produits de 2 nombres inférieurs à 10 ». Les points d'appui pour la construction des résultats pendant la phase d'apprentissage sont en partie différents de ceux relatifs au répertoire additif. On peut citer l'appui :

- sur **les résultats rapidement connus des tables de 2 et de 5** ;
- sur **le comptage de *n* en *n*** pour retrouver un résultat à partir d'un résultat mémorisé ;
- sur la connaissance des carrés, souvent bien maîtrisée ;
- sur **la commutativité de la multiplication** ;
- sur le fait **que multiplier par 4, c'est doubler deux fois** ou que **multiplier par 6 revient à tripler, puis doubler** ;
- sur **des particularités et des régularités repérées dans la table de Pythagore**, par exemple le fait de multiplier un nombre par 9 revient à prendre le prédécesseur de ce nombre comme chiffre des dizaines et le complément à 9 de ce dernier comme chiffre des unités (6 · 9 = 54 : 5 c'est 6 –1 et 5 + 4 = 9).

6. A l'école maternelle : Installer une bonne représentation des nombres et les relations entre les nombres

Les capacités en calcul mental reposent sur **une bonne représentation des nombres et des relations qui les unissent**, ceci se prépare dès les premières années de la maternelle. Cette construction passe par de nombreuses activités lors desquelles les élèves résoudront des problèmes en **manipulant** des collections d'objets **réels** puis **représentés** ou **symbolisés**.

Les différentes quantités construites seront imagées par des collections de points (en constellations ou non) et symbolisées avec les doigts et ce dès les premières quantités (de 1 à 3 ou 4) en petite section. Ces mêmes représentations permettront de mettre en évidence les relations entre les nombres, en particulier le fait qu'un nombre de la suite numérique c'est un de plus que son prédécesseur, un de moins que son suivant. Pour faire 4, on lève un doigt de plus que pour 3, on rajoute un point à la collection. On peut également lever deux doigts sur chaque main.
A travers la résolution de problèmes de type additif ou de partage, on pourra mettre en évidence que deux nombres permettent d'en construire un troisième, par exemple que 3 et 2 ça fait 5.

Avoir **une bonne représentation de la quantité 5**, par exemple, c'est lui associer une désignation **verbale** (indispensable en calcul mental ou les nombres sont dits et pensés) et **chiffrée**, c'est être capable de **réaliser une collection de 5 éléments**, c'est savoir que **5 c'est aussi 4 et 1 ou 3 et 2**.

Ces représentations peuvent s'appuyer à la fois sur le caractère **cardinal** des nombres (5 figuré par 3 objets et 2 objets) et sur leur caractère **ordinal** (5, c'est 2 après 3).

7. Les moments du calcul mental

Le calcul mental est d'abord un moyen efficace de calculer. C'est donc intégré aux autres activités que le calcul mental doit d'abord vivre dans la classe. Son intérêt pratique majeur réside dans son utilité pour la vie quotidienne, dans la mesure où il suffit souvent pour prendre une décision et permet d'autre part de contrôler un résultat affirmé par une autre personne ou obtenu à l'aide d'une machine. Il doit être encouragé chez les élèves, par une forme d'imprégnation, dans toutes les activités relevant des **mathématiques** ou **d'autres disciplines**, dès lors qu'il permet de répondre plus rapidement et aussi efficacement qu'en posant les opérations ou qu'en utilisant la calculatrice. Il peut, ainsi, être utilisé dans différentes activités fonctionnelles : déplacement en autobus, **éducation physique**, consultation d'un calendrier, d'un catalogue ou d'un horaire, etc.

Dès le CP, des moments spécifiques doivent, **chaque jour**, être ménagés pour l'entraînement au calcul mental **automatisé** et pour l'exercice du calcul mental **réfléchi**. En fonction de l'objectif poursuivi, ils prennent des formes différentes.

- Dans la phase où il s'agit **d'entretenir et de contrôler la mémorisation de résultats** (tables, relations entre nombres du type 5, 20, 25, 50, 75, 100…) ou **l'automatisation de procédures** (compléments à la dizaine supérieure, multiplication ou division par 10 ; 100…), des **séquences brèves** (cinq à dix minutes) sont appropriées. De telles séquences de calcul peuvent être conduites avec la **classe entière**, ou par **groupes de huit à dix enfants**. Il est souhaitable qu'elles débutent par une activité très facile, quasi rituelle et surtout destinée à focaliser l'attention. La consigne est orale. En petit groupe, la réponse peut être individuelle et orale. En plus grand groupe, elle peut être écrite (sur ardoise ou papier), ou encore en exhibant une carte parmi un choix de cartes-réponses. Selon les séances, l'enseignant peut utiliser le procédé Lamartinière dans lequel, après avoir été noté sur l'ardoise, chaque résultat est immédiatement corrigé ou faire inscrire l'ensemble des résultats sur une feuille de papier pour ne les exploiter qu'à la fin de l'interrogation. Dans ce type de calcul, centré sur le résultat, la rapidité est un objectif visé, car il s'agit de faire maîtriser un répertoire avec sûreté.

- Dans la phase où il s'agit de **travailler le calcul réfléchi** (résultats exacts ou approchés), les **séquences** peuvent être **nettement plus longues** (de un quart d'heure à une demi-heure). Elles sont, en général, menées **en grand groupe**. Pour chaque question posée, il faut laisser du temps aux élèves pour **chercher**. Puis, vient le moment **d'expliciter les procédures utilisées** dans la classe, éventuellement de les traduire par écrit, avant de les discuter et de les justifier du point de vue de leur pertinence, de leur efficacité et de conclure par une brève **synthèse** de l'enseignant. Il peut être envisagé d'entraîner à l'exécution de certains types de calculs, pour obtenir des réponses rapides, mais en gardant à l'esprit que l'élève conserve le choix de la procédure qui lui paraît la plus adaptée ou la plus sûre. Ainsi pour calculer 23 + 9 ou 44 + 9 il est commode d'utiliser la suite d'opérateurs +10 suivi de –1. Il faut cependant prendre garde à faire apparaître les limites de ces procédés : pour 30 + 9 ou pour 31 + 9, d'autres procédures plus rapides sont disponibles. Et même pour 44 + 9, certains élèves peuvent préférer ajouter successivement 6 et 3 à 44, simplement parce qu'ils ont du mal à reculer dans la suite des nombres. Pour résumer, **certaines procédures peuvent être pointées comme souvent efficaces, mais liberté doit être laissée à l'élève de choisir la**

procédure qu'il est le mieux à même de mener à son terme. Pour d'autres types de calculs, c'est un véritable "problème de calcul" qui est posé, c'est-à-dire une opération pour laquelle il n'existe pas de stratégie clairement privilégiée (ex. 348 + 257). Dans ce cas, la rapidité d'exécution n'est nullement un objectif, et l'on favorisera l'explicitation des procédures des uns et des autres. Ceci dans le but d'en faire découvrir de nouvelles et ultérieurement de pouvoir les utiliser.

Dans tous les cas (calcul automatisé ou calcul réfléchi), les questions peuvent porter **directement sur les nombres** ou être situées dans le cadre de la **résolution de « petits problèmes »,** dans des contextes variés : sens des opérations et entraînement au calcul mental sont alors travaillés simultanément. Ajoutons qu'il n'est pas équivalent de poser la question *« calculer 17 + 23 »* (oralement ou par écrit) et le problème *« Arnaud avait 17 billes et en gagne 23 ; combien en a-t-il maintenant ? »*. Chacun de ces énoncés active une représentation de la tâche à accomplir. Dans le premier cas, elle porte sur des nombres "purs", dans le second elle s'appuie sur l'évocation d'un certain champ de réalité. L'expérience montre surtout qu'il s'agit, dans le second cas, d'un moyen efficace d'aider les élèves à progresser dans la maîtrise du « sens des opérations ».
En dehors des séquences décrites ci-dessus, des situations de **jeux**, stratégiques ou non, utilisant des supports classiques (dés, dominos, cartes, jeux et logiciels du commerce…) ou des supports spécifiques mettent en jeu des décompositions numériques ou des calculs simples. Elles fournissent des occasions de travailler la mémorisation de résultats ou la mise en œuvre de stratégies de calcul. Elles peuvent intervenir dans le cadre d'ateliers, en groupes restreints, ou bien en fond de classe.